数理解析研究所講究録
223巻 1974年 73-81

Stieltjes 変換による分布の特徴づけ
——特に単峰分布とモーメント問題について——

阪大 教養　石井 恵一

1. 序

Stieltjes 変換はモーメント問題の解析的研究において Nevanlinna 等により用いられた古典的な道具であるが，分布とモーメントの関係を調べるのに便利である。

筆者はだいぶ以前に[2]において，この変換を単峰分布 (unimodal distribution) の特徴づけに応用し，特に単峰分布のモーメント問題がそれを用いて容易に扱われることを示した．ここでは，まずその結果の概要を引用した上で，さらに単峰分布の構造を Stieltjes 変換を用いて考察することにしたい。

定義 Fを実数空間上の確率分布とするとき，

$$I(z;F)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dF(t)}{z-t} \qquad (z:\text{複素数})$$

をFの Stieltjes 変換という．

定理1 (cf. Shohat-Tamarkin [1], Chap. II).

$I(z;F)$ は複素平面上の $\mathfrak{Im}\, z = y > 0$ において analytic, $\mathfrak{Im}\, I(z;F) \leqq 0$, かつ, 任意の ε $(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2})$ に対し扇形領域

(1) $$\varepsilon \leqq \arg z \leqq \pi - \varepsilon$$

において $z \longrightarrow \infty$ とするとき

(2) $$z\, I(z;F) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dF(t) = 1.$$

逆に, 関数 $f(z)$ が $y>0$ で analytic, $y>0$ で $\mathfrak{Im}\, f(z) \leqq 0$, かつ, 扇形領域 (1) で $z \to \infty$ のとき $z f(z) \longrightarrow 1$ をみたすならば, $f(z)$ は $y>0$ においてある分布関数 F の Stieltjes 変換であり, F は一意的である。

[注] とくに, F が閉区間 S 上の分布である必十条件は, $I(z;F)$ が複素平面上実軸上の区間 S を除いて analytic なこと (cf. Isii [2]).

<u>定理 2</u> (cf. [1]). F が $2n$ 次までのモーメント μ_r $(r=1, 2, \cdots, 2n)$ をもつとき,

(3) $$I(z;F) = \frac{1}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\mu_{2n}}{z^{2n+1}} + R_{2n+1}(z),$$

ただし, 扇形領域 (1) で $z \longrightarrow \infty$ のとき $R_{2n+1}(z) = o(z^{-2n-1})$, と表わされる.

逆に, 分布 F の Stieltjes 変換 $I(z;F)$ が (3) の形に表わされるならば F は $2n$ 次までのモーメントをもち, それらは

(3)の右辺における $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{2n}$ に等しい。

逆変換 (Stone [3]). $t_1 < t_2$ に対し

$$\frac{1}{2}\left[F(t_2+0)+F(t_2-0)\right]-\frac{1}{2}\left[F(t_1+0)+F(t_1-0)\right]$$
$$=\lim_{\delta\to+0} -\frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{I}m\, \mathrm{I}(t+i\delta; F)\,dt$$

2. 単峰分布

定義. 分布 F が mode β において単峰であるとは、$x_1 < x_2 < \beta < x_3 < x_4$ をみたす任意の x_1, x_2, x_3, x_4 に対し

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\{F(x_1)+F(x_2)\}$$
$$F\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}\{F(x_3)+F(x_4)\}$$

が成り立つこと。

この定義は次のことと同値である：

上のような x_1, x_2, x_3, x_4 と任意の $h>0$ に対し

$$F(x_1)-F(x_1-h) \leqq F(x_2)-F(x_2-h)$$
$$F(x_3+h)-F(x_3) \geqq F(x_4+h)-F(x_4)$$

定理 3 (cf. [2]). F が β において単峰であるための必要十分条件は、任意の θ $(0<\theta<\pi)$ に対し、半直線 $\arg(z-\beta)=\theta$ に沿って z が β から遠ざかるとき $\mathcal{I}m\,\mathrm{I}(z; F)$ が単調非減少なこと。

系1　Fがβにおいて単峰であるための必十条件は，$-(z-\beta)\,I'(z\,;\,F)$がある分布のStieltjes変換であること．

証明　$\beta=0$として一般性を失わない．

必要）Fが0において単峰とする．$f(z)=I(z;F)$とおき，$z=re^{i\theta}$とかくと，

$$\frac{\partial}{\partial r}f(z)=f'(z)\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{z}{r}f'(z)$$

だから，定理3により$\mathrm{Im}\,z=y>0$において

(4)　$$\mathrm{Im}\,[\,zf'(z)\,]\geqq 0.$$

$g(z)=-zf'(z)$とおくと，$\mathrm{Im}\,z>0$において$g(z)$はanalyticで(4)により

(5)　$$\mathrm{Im}\,g(z)\leqq 0.$$

また，(2)により$f(z)=\frac{1}{z}+R(z)$，ただし，扇形領域(1)で$z\longrightarrow\infty$とするとき$R(z)=o\left(\frac{1}{z}\right)$，とかける．

したがって，$g(z)=\frac{1}{z}-zR'(z)$.

$\varepsilon>0$を任意に固定すると，(1)をみたす各zに対しzを中心とする円$C=\{\zeta\mid |\zeta-z|=|z|\sin\frac{\varepsilon}{2}\}$は扇形領域$\frac{\varepsilon}{2}\leqq\arg\zeta\leqq\pi-\frac{\varepsilon}{2}$に含まれるから

(6)　$$R'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{R(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta$$

と積分表示できて，(1)において$R'(z)=O\left(\frac{R(z)}{z}\right)=o\left(\frac{1}{z^2}\right)$を得る．ゆえに(1)において$z\longrightarrow\infty$のとき

(7) $$z\,g(z) \longrightarrow 1$$

となり，定理1により $g(z)$ はある分布の Stieltjes 変換である。

十分）$-z\,I'(z;F)=I(z;G)$ とする。$f(z)=I(z;F)$，$g(z)=I(z;G)$ とおくと，g が (5) をみたすことから f は (4) をみたし，定理3によって F が 0 において単峰であることがわかる。

［注］さらに強い結果として，任意の分布 G に対し，$-z\,I'(z;F)=I(z;G)$ となる単峰分布 F が（一意的に）存在する。実際，L を z を始点とし，（ある ε に対する）扇形領域 (1) の中で ∞ へ行く任意の path とするとき，z の関数 $f(z)=\int_L \frac{I(\zeta;G)}{\zeta}\,d\zeta$ は定理1の条件をみたすこと，L のえらび方によらないこと，および $-z f'(z)=I(z;G)$ となることが簡単な計算で確かめられ，$f(z)=I(z;F)$ となる分布 F の存在がわかる。このことと，上の系1から

系2．閉区間 S 上の β における単峰分布全体の族 $\mathfrak{F}_\beta(S)$ と，S 上の分布全体の族 $\mathfrak{F}(S)$ との間に

(8) $$-(z-\beta)\,I'(z;F)=I(z;G) \quad \left(F\in\mathfrak{F}_\beta(S),\ G\in\mathfrak{F}(S)\right)$$

により1対1の対応が成り立つ。

3．モーメント問題

$\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_m$ を実数とする。区間S上の確率分布Fが $\int_S x^k dF(x) = \mu_k$ ($k=1, 2, \cdots\cdots, m$)をみたすとき，Fは モーメント問題$\{\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_m \mid S\}$の解であるという。

前節の系2を用いると，

定理4. (8)により$F \in \mathfrak{F}_\beta(S)$が$G \in \mathfrak{F}(S)$に対応しているとき，$F$がモーメント問題$\{\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_{2n} \mid S\}$の解ならば，$G$はモーメント問題$\{\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots, \nu_{2n} \mid S\}$の解である。ただし，$\nu_r = (r+1)\mu_r - \beta r \mu_{r-1}$, $(\mu_0 = 1)$.

証明. 定理2により$I(z; F)$は(3)の形に表現されるから，(8)により

$$I(z; G) = \frac{1}{z} + \frac{\nu_1}{z^2} + \frac{\nu_2}{z^3} + \cdots\cdots + \frac{\nu_{2n}}{z^{2n+1}} - (z-\beta) R'_{2n+1}(z)$$

の形になる。しかも$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_{2n}$は定理で与えたものになる。(6)と同様な論法で $R'_{2n+1}(z) = o(z^{-2n-1})$ ((1)で$z \to \infty$) が示されるから，再び定理2により，Gのモーメントは$\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots, \nu_{2n}$と一致する。

系 モーメント問題$\{\mu_1, \cdots\cdots, \mu_{2n} \mid (-\infty, \infty)\}$が$\beta$をmodeとする単峰な解をもつための必十条件は，

$$\Delta_r(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta^2 & \cdots & \beta^{r+1} \\ 0 & \mu_0 & 2\mu_1 & \cdots & (r+1)\mu_r \\ \mu_0 & 2\mu_1 & 3\mu_2 & \cdots & (r+2)\mu_{r+1} \\ \vdots & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ r\mu_{r-1} & & \cdots & & (2r+1)\mu_{2r} \end{vmatrix} \qquad (\mu_0 = 1)$$

とおくとき，次の2つのいずれかが成り立つこと：

(i) $\Delta_r(\beta)>0 \quad (r=1,2,\cdots\cdots,n)$

(ii) ある $k<n$ に対して $\Delta_i(\beta)>0 \quad (i=1,\cdots\cdots,k)$

$$\Delta_i(\beta)=0 \quad (i=k+1,\cdots\cdots,n)$$

［注1］ (ii)の場合は分布は一意的に定まる．

［注2］ $S=[0,\infty)$，$S=[0,1]$ 等の場合にも，同様にして類似の結果が成り立つ．

［注3］ すべてのモーメント $\mu_r \ (r=1,2,\cdots\cdots)$ が与えられたときは，上で $r\leqq n$ の制限をとり去ればよい．さらに，解が一意的（たとえば Carleman の条件 $\sum \mu_{2n}^{-\frac{1}{2n}}=\infty$ のとき）ならば，単峰分布が上の系により特徴づけられる．

証明．$\Delta_r'=\begin{vmatrix} 1 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots\cdots & \nu_r \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots\cdots & \nu_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_r & \nu_{r+1} & \cdots\cdots & & \nu_{2r} \end{vmatrix}$ とおくとき，よく知られた Hamburger のモーメント問題 $\{\nu_1,\cdots\cdots,\nu_{2n} \mid (-\infty,\infty)\}$ が解をもつための条件は，2条件

(i) $\Delta_r'>0 \quad (r=1,\cdots\cdots,n)$

(ii) ある $k<n$ に対し $\Delta_i'>0 \ (i=1,\cdots,k)$，$\Delta_i'=0 \ (i=k+1,\cdots,n)$

のいずれかが成り立つことである．したがって，定理4に注意すれば，$\Delta_r'=\Delta_r(\beta)$ を示せばよい．実際，$\Delta_r(\beta)$ の第 $r+1$ 列に β を乗じて第 $r+2$ 列から引き，次に第 r 列に

βを乗じて才$r+1$列から引き，以下同様にしてゆくと，

$$\Delta_r(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \nu_1 & \cdots\cdots & \nu_r \\ \mu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots\cdots & \nu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r\mu_{r-1} & \nu_r & \nu_{r+1} & \cdots\cdots & \nu_{2r} \end{vmatrix} = \Delta_r'$$

となる。

4. 単峰分布の族の構造

一般性を失わずに mode β は 0 と仮定する．$F \in \mathfrak{F}_0$ は定理3系2により，Stieltjes 変換が

$$-z\,I'(z;F) = I(z;G) \quad (G\text{はある分布})$$

をみたすものとして特徴づけられる．これから，

$$I'(z;F) = -\frac{1}{z}I(z;G) = -\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dG(t)}{z-t} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{-1}{z(z-t)}\,dG(t).$$

ところが，区間 $[0,t]$ （$t<0$ のときは $[t,0]$）の一様分布を U_t とすれば

$$I'(z;U_t) = \frac{-1}{z(z-t)}$$

であるから，$\quad I'(z;F) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} I'(z;U_t)\,dG(t).$

故に，

$$(9) \qquad F = \int_{-\infty}^{\infty} U_t\,dG(t).$$

これは，任意の $F \in \mathfrak{F}_0$ は一様分布族 $\{U_t \mid -\infty < t < \infty\}$ の mixture として (9) のように表現されることを示す。実

際，$\mathcal{F}_0$ は符号つき測度全体のつくるベクトル空間の凸集合であり，(5) から一様分布 U_t がその extreme point である。

また，このことから直ちに Khintchine の定理：「X が 0 を mode とする単峰分布に従うための必十条件は，$X=ZY$ (Z は $[0,1]$ の一様分布に従う確率変数，Y は Z と独立な任意の確率変数）と表わされること」の別証が得られる．実際，Y の分布を G とすれば，$\Pr\{ZY \leqq x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{tZ \leqq x\}\, dG(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_t(x)\, dG(t)$ となり，ZY の分布が (9) の F に相当するからである。

参考文献

[1] Shohat, J. A. and Tamarkin, J. D., The problem of moments. Mathematical Surveys, No. 1. American Mathematical Society (1943).

[2] Isii, K., Note on a characterization of unimodal distributions. Ann. Inst. Statist. Math. 9 (1958).

[3] Stone, M. H., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 15 (1932).